תוספות לספר

מתמטיקה במבנה הצבירה
לתלמידי 4 יח"ל
שאלון 035004
(מאת גבי יקואל)

בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של הפונקציה $e^{f(x)}$

הפרקים הבאים נוספו לאור בקשותיהם של מורים רבים. בפרקים אלו נוספו תרגילים ודוגמאות פתורות בנושאי החדו"א של פונקציות מעריכיות. תרגילים נוספים ודוגמאות פתורות בנושאי החדו"א של הפונקציה $y = e^x$ תמצא בספר לשאלון 035003 בעמודים : 187 - 163 ו- 241 - 232 .

הערות:

- תרגילים נוספים ודוגמאות פתורות בנושאי החדו"א של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות תמצא בספר לשאלון 035004 בעמודים : 352 - 325 .
- **שים לב!** על-פי מיקוד הלמידה **למועד חורף תשס"ה**, לא תידרשנה נגזרות של **פונקציות מעריכיות**. שאלות עם אינטגרלים של פונקציות מעריכיות יכולות להופיע.
- מספור העמודים והפרקים שבתוספת הזו הם ברצף ישיר לנספח לספר של שאלון 035004 , שיצא לאור בחודש נובמבר 2004 .

פרק 3: שאלות נוספות לחזרה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

א. שימוש בנוסחה: $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

דוגמא פתורה

מצא את הנגזרת של הפונקציה: $y = 5e^{3x-x^3}$.

פתרון:

$$y' = 5e^{3x-x^3} \cdot (3x - x^3)' = 5e^{3x-x^3} \cdot (3 - 3x^2) =$$
$$= 5e^{3x-x^3} \cdot 3 \cdot (1 - x^2) = 15e^{3x-x^3} \cdot (1 - x^2)$$

תרגילים לעבודה עצמית

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = e^{5x}$

(2) $y = \frac{1}{2}e^{-4x}$

(3) $y = 8e^{5-\frac{x}{2}}$

(4) $y = e^{-3x^2}$

(5) $y = e^{2x-x^2}$

(6) $y = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{4x} - e^{-4x}\right)$

(7) $y = e^{2\sqrt{x}}$

(8) $y = e^{8\sqrt{x}} + e^{-8\sqrt{x}}$

(9) $y = \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{x}}$

(10) $y = e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}$

תשובות

(1) $y' = 5e^{5x}$

(2) $y' = -2e^{-4x}$

(3) $y' = -4e^{5-\frac{x}{2}}$

(4) $y' = -6x \cdot e^{-3x^2}$

(5) $y' = (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2}$

(6) $y' = 2 \cdot \left(e^{4x} + e^{-4x}\right)$

(7) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{2\sqrt{x}}$

(8) $y' = \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \left(e^{8\sqrt{x}} - e^{-8\sqrt{x}}\right)$

(9) $y' = \frac{2}{x^2} \cdot e^{-\frac{4}{x}}$

(10) $y' = \frac{1}{x^2} \cdot \left(e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$

ב. נגזרת של מכפלה הכוללת פונקציה מעריכית $e^{f(x)}$

דוגמא פתורה

מצא את הנגזרת של הפונקציה: $y = x^3 \cdot e^{-2/x}$.

פתרון:

ניעזר בנוסחת הנגזרת של מכפלת פונקציות: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

נסמן: $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = e^{-2/x}$.

נציב בנוסחת הנגזרת של מכפלת פונקציות ונקבל:

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot e^{-2/x} + x^3 \cdot \left(e^{-2/x}\right)' = 3x^2 \cdot e^{-\frac{2}{x}} + x^3 \cdot e^{-\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)' =$$

$$= 3x^2 \cdot e^{-\frac{2}{x}} + e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} \cdot x^3 = e^{-\frac{2}{x}} \cdot \left(3x^2 + 2x\right)$$

תרגילים לעבודה עצמית

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = x \cdot e^{-2x}$ (2) $y = x^2 \cdot e^{-3x}$

(3) $y = (2x-5) \cdot e^{\frac{x}{2}}$ (4) $y = (x^2-4) \cdot e^{-x}$

(5) $y = x^2 \cdot e^{1-x^2}$ (6) $y = \sqrt{x} \cdot e^{-4x}$

(7) $y = -2x \cdot e^{\sqrt{x}}$ (8) $y = \frac{4x}{e^{5x}}$

(9) $y = \frac{e^{2x}}{x}$ (10) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{2x}}$

תשובות

(1) $y' = e^{-2x} \cdot (1-2x)$ (2) $y' = e^{-3x} \cdot (2x-3x^2)$

(3) $y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x - \frac{1}{2})$ (4) $y' = e^{-x} \cdot (-x^2+2x+4)$

(5) $y' = e^{1-x^2} \cdot (2x-2x^3)$ (6) $y' = e^{-4x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\right)$

(7) $y' = -e^{\sqrt{x}} \cdot (2+\sqrt{x})$ (8) $y' = 4 \cdot (1-5x) \cdot e^{-5x}$

(9) $y' = e^{2x} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ (10) $y' = e^{\frac{1}{2x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2}\right)$

ג. נגזרת של מנה הכוללת פונקציה מעריכית $e^{f(x)}$

דוגמא פתורה

מצא את הנגזרת של הפונקציה : $y=\frac{8e^{x/4}}{1-x}$.

פתרון:

ניעזר בנוסחת נגזרת המנה של פונקציות :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

נסמן : $f(x)=8e^{x/4}$ ו- $g(x)=1-x$.

נציב בנוסחת נגזרת המנה של פונקציות ונקבל :

$$y'=\frac{(8e^{x/4})'\cdot(1-x)-8e^{x/4}\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{8e^{x/4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-x)-(-1)\cdot 8e^{x/4}}{(1-x)^2}=\frac{2e^{x/4}\cdot(1-x)+8e^{x/4}}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{e^{x/4}\cdot(2-2x+8)}{(1-x)^2}=\frac{e^{x/4}\cdot(10-2x)}{(1-x)^2}=\frac{2\cdot(5-x)\cdot e^{x/4}}{(1-x)^2}$$

תרגילים לעבודה עצמית

גזור את הפונקציות הבאות :

(1) $y=\frac{e^{2x}}{x}$ (2) $y=\frac{e^{-x}}{x^2}$

(3) $y=\frac{3e^{x/3}}{2x+5}$ (4) $y=\frac{x^2-1}{e^{2x}}$

(5) $y=\frac{e^{4x}}{\sqrt{x}}$ (6) $y=\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(7) $y=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ (8) $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

(9) $y=\frac{1}{e^{3x}+1}$ (10) $y=\frac{e^{10x}-10}{e^{10x}+10}$

(11) $y=\frac{e^{-x^2}}{x^2-2x}$ (12) $y=e^{\sqrt{3x}}+e^{-\sqrt{3x}}$

תשובות

(1) $$y' = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2}$$

(2) $$y' = \frac{e^{-x} \cdot (-x^2 - 2x)}{x^4} = -\frac{e^{-x} \cdot (x+2)}{x^3}$$

(3) $$y' = \frac{e^{x/3} \cdot (2x-1)}{(2x+5)^2}$$

(4) $$y' = \frac{2 \cdot (x - x^2 + 1)}{e^{2x}}$$

(5) $$y' = \frac{e^{4x} \cdot \left(4\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{e^{4x} \cdot (8x-1)}{2x \cdot \sqrt{x}}$$

(6) $$y' = \frac{e^{2\sqrt{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{e^{2\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x} - 1)}{2x \cdot \sqrt{x}}$$

(7) $$y' = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

(8) $$y' = \frac{8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = \frac{8e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$$

(9) $$y' = -\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$$

(10) $$y' = \frac{200e^{10x}}{(e^{10x}+10)^2}$$

(11) $$y' = \frac{-2 \cdot e^{-x^2} \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

(12) $$y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{3x}} - e^{-\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}$$

ד. עלייה וירידה של פונקציה מהצורה $e^{f(x)}$ בנקודה שעליה

דוגמא פתורה

נתונה הפונקציה: $y=\frac{e^{2x}}{3x-5}$. קבע אם הפונקציה עולה או יורדת כאשר $x=2$.

פתרון:

נגזור את הפונקציה הנתונה ונציב בנגזרת $x=2$.

נגזור ונקבל:

$$y'=\frac{2e^{2x}\cdot(3x-5)-3\cdot e^{2x}}{(3x-5)^2}=\frac{e^{2x}\cdot(6x-13)}{(3x-5)^2}$$

נציב בנגזרת $x=2$:

$$y'(2)=\frac{e^4\cdot(-1)}{1^2}=-e^4<0$$

מכיון ש- $y'(2)<0$ הרי שהפונקציה יורדת בנקודה שבה $x=2$.

תרגילים לעבודה עצמית

קבע לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא יורדת או עולה בנקודה הרשומה לידה:

(1) $x=0$ $y=e^{4x}$ (2) $x=6$ $y=-e^{-\frac{x}{3}}$

(3) $x=3$ $y=6e^{2-\frac{2x}{3}}$ (4) $x=2$ $y=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

(5) $x=4$ $y=\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ (6) $x=1$ $y=\frac{e^{x^3}}{2x-1}$

(7) $x=0$ $y=e^{-4x}-x\cdot e^{4x}$ (8) $x=-1$ $y=\frac{3x+2}{e^{2x}}$

(9) $x=1$ $y=e^{-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot e^{x}$ (10) $x=-2$ $y=x^2\cdot e^{3-2x}$

(11) $x=\frac{1}{2}$ $y=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ (12) $x=0$ $y=\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

תשובות

(1) $y'(0)=4>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

(2) $y'(6)=\frac{1}{3}e^2>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

(3) $y'(3)=-4<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(4) $y'(2)=3e^{-2}>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

(5) $y'(4)=-\frac{1}{4e}<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(6) $y'(1)=e>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

(7) $y'(0)=-5<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(8) $y'(-1)=5e^2>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

(9) $y'(1)=-\frac{3e}{2}-\frac{1}{2e}<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(10) $y'(-2)=-12e^7<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(11) $y'(\frac{1}{2})=-\frac{4e}{(e-1)^2}<0$ $\Leftarrow$ הפונקציה יורדת

(12) $y'(0)=3>0$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה

ה. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה כאשר נתונה פונקציה מהצורה $e^{f(x)}$ ונקודת ההשקה

דוגמא פתורה

נתונה הפונקציה: $y=\frac{e^{x/4}}{\sqrt{x}}$. בנקודה שבה $x=4$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

(א) מצא את שיפוע המשיק.

(ב) מצא את משוואת המשיק.

פתרון:

(א) כדי למצוא את שיפוע המשיק נגזור את הפונקציה הנתונה.

נגזור לפי כלל הנגזרת של מנה ונקבל:

$$y'=\frac{e^{x/4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{x}-e^{x/4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

נציב בנגזרת $x=4$:

$$m_{\text{משיק}}=y'(4)=\frac{e\cdot\frac{1}{4}\cdot 2-e\cdot\frac{1}{2\cdot 2}}{4}=\frac{e}{16}$$

(ב) נמצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.

נציב בפונקציה $x=4$ ונקבל: $y(4)=\frac{e}{\sqrt{4}}=\frac{e}{2}$

כלומר נקודת ההשקה היא: $\left(4,\frac{e}{2}\right)$.

כדי למצוא את משוואת המשיק נשתמש בנוסחה: $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

נציב: $m=\frac{e}{16}$, $x_1=4$, $y_1=\frac{e}{2}$: $y-\frac{e}{2}=\frac{e}{16}\cdot(x-4)$

ונקבל את משוואת המשיק המבוקשת: $\boldsymbol{y=\frac{e}{16}\cdot x+\frac{e}{4}}$

תרגילים לעבודה עצמית

בכל אחד מהתרגילים הבאים נתונה פונקציה. מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה הרשומה לידה. עבור כל פונקציה ענה על הסעיפים הבאים:

(א) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנתונה.

(ב) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנתונה.

(1) $x=0$ $y=e^{-x}$ (2) $x=-1$ $y=-e^{x^2}$

(3) $x=\frac{1}{2}$ $y=4e^2\cdot x-e^{4x}$ (4) $x=2$ $y=x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}$

המשך בעמוד הבא...

(5) $x=4$ $\quad y=8\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{x}{4}}$

(6) $x=1$ $\quad y=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

(7) $x=-1$ $\quad y=\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$

(8) $x=0$ $\quad y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(9) $x=-2$ $\quad y=(4-x^2)\cdot e^{-x}$

(10) $x=1$ $\quad y=\dfrac{e^x}{x+1}$

(11) $x=-1$ $\quad y=(3-e^{2x-3})\cdot x^2$

(12) $x=4$ $\quad y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x}-1}$

<u>תשובות</u>

	(א)	(ב)
(1)	$m=-1$	$y=-x+1$
(2)	$m=2e$	$y=2e\cdot x+e$
(3)	$m=0$	$y=e^2$
(4)	$m=6e$	$y=6e\cdot x-8e$
(5)	$m=-\frac{2}{e}$	$y=-\frac{2}{e}\cdot x+\frac{24}{e}$
(6)	$m=\frac{2}{e}$	$y=\frac{2}{e}\cdot x-\frac{1}{e}$
(7)	$m=0$	$y=e$
(8)	$m=1$	$y=x$
(9)	$m=4e^2$	$y=4e^2\cdot x+8e^2$
(10)	$m=\frac{e}{4}$	$y=\frac{e}{4}\cdot x+\frac{e}{4}$
(11)	$m=-6$	$y=-6x-3-\frac{1}{e^5}$
(12)	$m=\frac{3}{4}e^4$	$y=\frac{3}{4}e^4\cdot x-2e^4$

ו. מציאת נקודת ההשקה ומשוואת המשיק לגרף הפונקציה כאשר נתונה פונקציה מהצורה $e^{f(x)}$ ושיפוע המשיק

דוגמא פתורה

נתונה הפונקציה : $y=e^{-\frac{x}{4}}-\frac{x}{4e}+\frac{1}{e}$.

בנקודה A שעל גרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו : $m=-\frac{1}{2e}$.

(א) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה A .

(ב) מצא את משוואת המשיק בנקודה A .

פתרון:

(א) נגזור את הפונקציה ונקבל: $y'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{4}}-\frac{1}{4e}$

כדי למצוא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה

נציב : $m_{\text{משיק}}=y'=-\frac{1}{2e}$ ונקבל: $-\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}-\frac{1}{4e}=-\frac{1}{2e}$

$-\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}=-\frac{1}{4e}$

נפשט את המשוואה ונקבל: $e^{-x/4}=e^{-1}$

ומכאן פתרון המשוואה הוא : $-\frac{x}{4}=-1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=4}$

נציב בפונקציה $x=4$ ונמצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה A :

$y(4)=e^{-1}-\frac{4}{4e}+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

כלומר שיעורי נקודת ההשקה A הם : $\mathbf{A}\left(\mathbf{4},\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\right)$.

(ב) כדי למצוא את משוואת המשיק נשתמש בנוסחה : $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

נציב : $m=-\frac{1}{2e}$, $x_1=4$, $y_1=\frac{1}{e}$: $y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{2e}\cdot(x-4)$

ונקבל את משוואת המשיק המבוקשת: $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2e}\cdot x+\frac{3}{e}}$

תרגילים לעבודה עצמית

בכל אחד מהתרגילים הבאים נתונה פונקציה ושיפוע של משיק לגרף הפונקציה בנקודה A הנמצאת עליה. עבור כל פונקציה ענה על הסעיפים הבאים :

(א) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה A .

(ב) מצא את משוואת המשיק בנקודה A .

(1) $m=-1$ $\quad y=e^{-x}+2$

(2) $m=2e^4$ $\quad y=e^{2x}$

(3) $m=\frac{3e}{2}$ $\quad y=e^{\frac{x}{2}}+e\cdot x$

(4) $m=0$ $\quad y=x^2\cdot e^{-2x}$

(5) $m=4e^2$ $\quad y=3e^{-\frac{2x}{3}}+6e^2\cdot x$

(6) $m=4$ $\quad y=5-2e^{-2x}$

(7) $m=0$ $\quad y=\frac{e^{x/4}}{x}$

(8) $m=\frac{5e}{2}$ $\quad y=e^{\frac{x}{2}}+2e\cdot x-e$

(9) $m=-3$ $\quad y=3e^{-x}-2$

(10) $m=4e$ $\quad y=4e^{\frac{x}{2}}+2e\cdot x$

<u>תשובות</u>

(1) (א) $A(0,3)$ (ב) $y=-x+3$

(2) (א) $A(2,e^4)$ (ב) $y=2e^4\cdot x-3e^4$

(3) (א) $A(2,3e)$ (ב) $y=\frac{3e}{2}\cdot x$

(4) (א) $A(0,0)$ (ב) $y=0$
או
(א) $A(1,e^{-2})$ (ב) $y=e^{-2}$

(5) (א) $A(-3,-15e^2)$ (ב) $y=4e^2\cdot x-3e^2$

(6) (א) $A(0,3)$ (ב) $y=4x+3$

(7) (א) $A\left(4,\frac{e}{4}\right)$ (ב) $y=\frac{e}{4}$

(8) (א) $A(2,4e)$ (ב) $y=\frac{5e}{2}\cdot x-e$

(9) (א) $A(0,1)$ (ב) $y=-3x+1$

(10) (א) $A(2,8e)$ (ב) $y=4e\cdot x$

ז. חקירת פונקציות הכוללות פונקציות מהצורה $e^{f(x)}$

שלבים בחקירת פונקציה:

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).

(ג) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ד) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(ה) היעזר בסעיפים (א) – (ד) ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

דוגמא פתורה

נתונה הפונקציה: $y=(2-x^2)\cdot e^{-2x}$. חקור את הפונקציה לפי השלבים שלעיל.

פתרון:

(א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x .

(ב) כדי למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לאפס. להלן נגזרת הפונקציה:

$$y'=-2x\cdot e^{-2x}+(2-x^2)\cdot(-2)\cdot e^{-2x}=2e^{-2x}\cdot(x^2-x-2)$$

מכיוון ש- $e^{-2x}\neq 0$ לכל x אזי כאשר משווים את הנגזרת לאפס

מתקבלת המשוואה הריבועית: $x^2-x-2=0$

שפתרונותיה הם: $x_1=-1\ ,\ x_2=2$

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$x>2$
y	↗	e^2	↘	$-2/e^4$	↗
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
מסקנות	עלייה	max	ירידה	min	עלייה

נקודות הקיצון של הפונקציה: $\min\ (2,-2/e^4)\ ,\ \max\ (-1,e^2)$.

הערה: את נקודות הקיצון ניתן היה גם לקבוע באמצעות הנגזרת השנייה.

(ג) תחומי עלייה: $x>2$ או $x<-1$.

תחום ירידה: $-1<x<2$.

(ד) נציב בפונקציה $x=0$ ונקבל: $y=2$.

כלומר הנקודה $(0,2)$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

המשך בעמוד הבא...

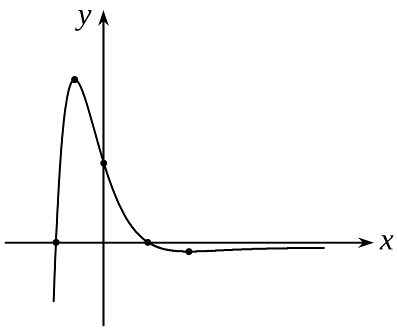
נציב בפונקציה $y=0$ ונקבל את המשוואה : $(2-x^2)\cdot e^{-2x}=0$

מכיוון ש- $e^{-2x}\neq 0$ לכל x אזי מתקיים : $2-x^2=0$

פתרונות המשוואה הם : $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$

כלומר הנקודות $(\sqrt{2},0)$ ו- $(-\sqrt{2},0)$ הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

(ה) להלן סקיצה של גרף הפונקציה :



<u>תרגילים לעבודה עצמית</u>

חקור את הפונקציות הבאות לפי השלבים המופיעים בראש העמוד הקודם.

(1) $y=-e^{-2x}-2x$

(2) $y=(x-1)\cdot e^{-x}$

(3) $y=(4-2x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

(4) $y=1+2e^{-x^2}$

(5) $y=e^{x^3-3x}$

(6) $y=x\cdot e^{-2x^2}$

(7) $y=(8-x^2)\cdot e^{-x}$

(8) $y=-e^{2x-x^2}$

(9) $y=x\cdot e^{x^2-3x}$

(10) $y=\frac{e^{0.5x^2}}{x}$

(11) $y=\frac{e^x}{x-1}$

(12) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{e^{2x}}$

תשובות

(1) (א) כל x.

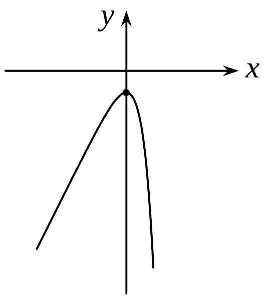
(ב) $\max\ (0,-1)$

(ג) תחום עלייה: $x<0$.

תחום ירידה: $x>0$.

(ד) $(0,-1)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(2) (א) כל x.

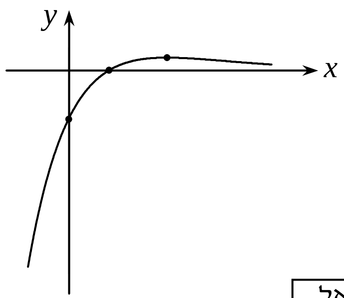
(ב) $\max\ (2,\frac{1}{e^2})$

(ג) תחום עלייה: $x<2$.

תחום ירידה: $x>2$.

(ד) $(0,-1)\ ,\ (1,0)$.

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(3) (א) כל x.

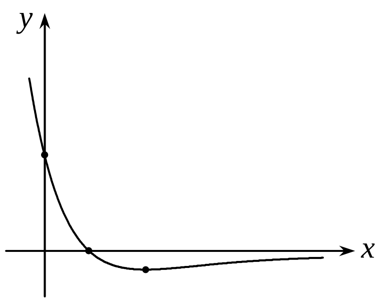
(ב) $\min\ (4,-\frac{4}{e^2})$

(ג) תחום ירידה: $x<4$.

תחום עלייה: $x>4$.

(ד) $(0,4)\ ,\ (2,0)$.

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(4) (א) כל x.

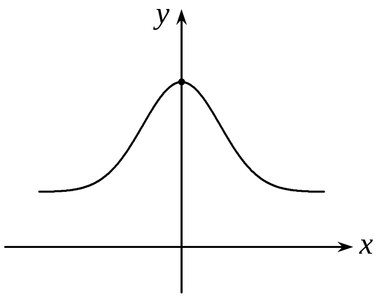
(ב) $\max\ (0,3)$

(ג) תחום עלייה: $x<0$.

תחום ירידה: $x>0$.

(ד) $(0,3)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(5) (א) כל x .

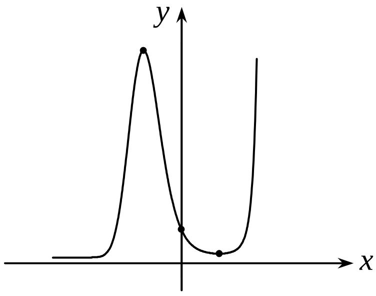
(ב) $\max\,(-1,e^2)$, $\min\,(1,\frac{1}{e^2})$.

(ג) תחומי עלייה: $x<-1$ או $x>1$.

תחום ירידה: $-1<x<1$.

(ד) $(0,1)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(6) (א) כל x .

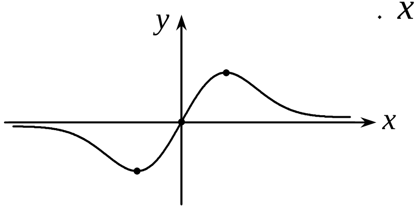
(ב) $\min\,(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{e}})$, $\max\,(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{e}})$.

(ג) תחומי ירידה: $x<-0.5$ או $x>0.5$.

תחום עלייה: $-0.5<x<0.5$.

(ד) $(0,0)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(7) (א) כל x .

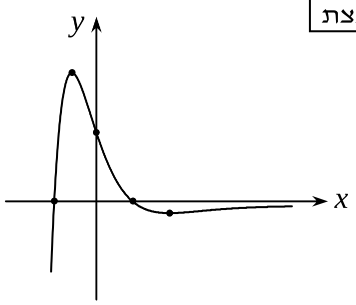
(ב) $\max\,(-2,4e^2)$, $\min\,(4,-\frac{8}{e^4})$.

(ג) תחומי עלייה: $x<-2$ או $x>4$.

תחום ירידה: $-2<x<4$.

(ד) $(\sqrt{8},0)$, $(-\sqrt{8},0)$, $(0,8)$.

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(8) (א) כל x .

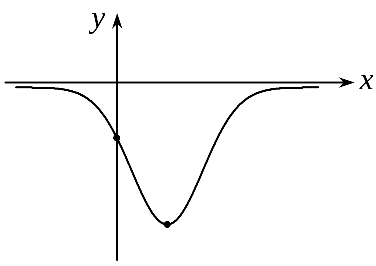
(ב) $\min\,(1,-e)$

(ג) תחום ירידה: $x<1$.

תחום עלייה: $x>1$.

(ד) $(0,-1)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(9) (א) כל x .

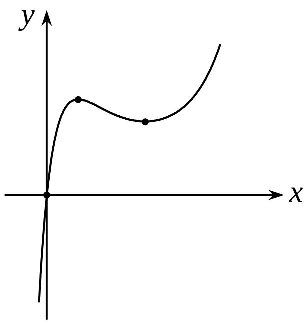
(ב) $\min\ (1,\frac{1}{e^2})$, $\max\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2e^{1.25}})$.

(ג) תחומי עלייה: $x<\frac{1}{2}$ או $x>1$.

תחום ירידה: $\frac{1}{2}<x<1$.

(ד) $(0,0)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(10) (א) $x\neq 0$

(ב) $\min\ (1,\sqrt{e})$, $\max\ (-1,-\sqrt{e})$.

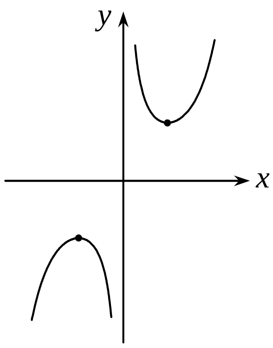
(ג) תחומי עלייה: $x<-1$ או $x>1$.

תחומי ירידה: $-1<x<0$

או $0<x<1$.

(ד) אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(11) (א) $x\neq 1$

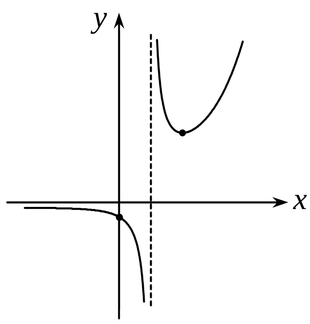
(ב) $\min\ (2,e^2)$

(ג) תחומי ירידה: $x<1$ או $1<x<2$.

תחום עלייה: $x>2$.

(ד) $(0,-1)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(12) (א) $x\geq 1$

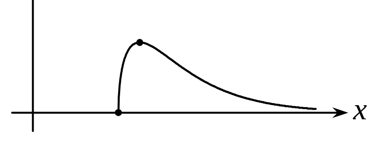
(ב) $\max\ (\frac{5}{4},\frac{1}{2e^{2.5}})$

(ג) תחום עלייה: $1<x<1.25$.

תחום ירידה: $x>1.25$.

(ד) $(1,0)$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



ח. חקירת פונקציות עם פרמטר
הכוללות פונקציות מהצורה $e^{f(x)}$

דוגמא פתורה

נתונה הפונקציה: $y=e^{-\frac{x}{2}}\cdot(x^2-a)$.

ידוע כי בנקודה שבה $x=1$ יש לפונקציה נקודת קיצון.

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .

(ב) מצא את סוג הקיצון שמתקבל בנקודה שבה $x=1$.

(ג) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הנוספת של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון:

(א) נגזור את הפונקציה הנתונה ונקבל:

$$y'=-\tfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot(x^2-a)+e^{-\frac{x}{2}}\cdot 2x=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\cdot(x^2-a)+2x\right]$$

בנקודת הקיצון הנגזרת מתאפסת. לכן כאשר נציב $x=1$
ערך הנגזרת צריך להיות אפס:

$$y'=e^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\cdot(1-a)+2\right]=0$$

מהדרישה שלעיל נקבל: $-1+a+4=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a=-3}$

נענה על סעיפים (ב) ו- (ג) *במקביל*, בעזרת <u>טבלת חקירה</u>:

נמצא תחילה את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הנוספת:

$$y'=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\cdot(x^2+3)+2x\right]=0$$

מתקבלת המשוואה הריבועית: $x^2-4x+3=0$

שפתרונותיה הם: $x_1=1 \quad , \quad x_2=3$

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
y	↘		↗		↘
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
מסקנות	ירידה	min	עלייה	max	ירידה

בנקודה שבה $x=1$ יש לפונקציה מינימום.

בנקודה שבה $x=3$ יש לפונקציה מקסימום.

<u>תרגילים לעבודה עצמית</u>

(1) נתונה הפונקציה: $y = a \cdot e^{-2x^2}$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -1$ הוא: $\frac{4}{e^2}$.

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ד) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ה) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ו) היעזר בסעיפים הקודמים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x-3}$.

הישר שמשוואתו: $y = 2e \cdot x + a$ משיק לגרף הפונקציה.

(א) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה.

(ב) מצא את ערכו של הפרמטר a .

(3) נתונה הפונקציה: $y = \frac{e^{a \cdot x}}{x}$.

ידוע כי בנקודה שבה $x = 0.5$ יש לפונקציה הנתונה נקודת קיצון.

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ד) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ה) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ו) היעזר בסעיפים הקודמים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $y = (2x + a) \cdot e^{-x}$.

ידוע כי בנקודה שבה $x = -1$ יש לפונקציה הנתונה נקודת קיצון.

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ד) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ה) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ו) היעזר בסעיפים הקודמים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה : $y = e^{2a\cdot x} + 3$. הישר המשיק לפונקציה
בנקודה שבה $x = 0$ מקביל לישר שמשוואתו : $y = 6x - 1$.
(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .
(ב) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$.

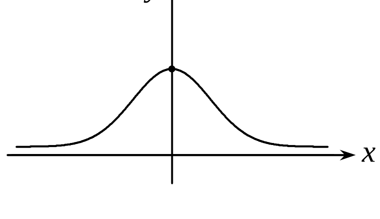
(6) נתונה הפונקציה : $y = \frac{e^{a\cdot x+1}}{1 - e^{a\cdot x}}$.
עבור אילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה הנתונה עולה בכל תחום הגדרתה ?

(7) נתונה הפונקציה : $y = e^{-x} + e^{x+a}$.
ידוע כי בנקודה שבה $x = 2$ יש לפונקציה הנתונה נקודת קיצון.
(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .
(ב) קבע את סוג הקיצון המתקבל בנקודה שבה $x = 2$.
(ג) מצא כמה נקודות משותפות יש לישר $y = k$ עם גרף הפונקציה הנתונה, בהתאם לערכים השונים של k .

(8) נתונה הפונקציה : $y = e^{2x}\cdot(x^2 + a\cdot x)$.
ידוע כי בנקודה שבה $x = 1$ יש לפונקציה הנתונה נקודת קיצון.
(א) מצא את ערכו של הפרמטר a .
(ב) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הנוספת של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות

(1) (א) $a = 1$
(ב) כל x .
(ג) $\min\ (0,1)$
(ד) תחום עלייה : $x < 0$.
תחום ירידה : $x > 0$.
(ה) $(0,1)$
(ו) ראה סקיצה משמאל :



(2) (א) $(2,e)$ (ב) $a=-3e$

(3) (א) $a=2$

(ב) $x\neq 0$

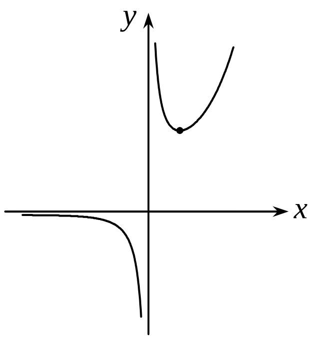
(ג) $\min\ (\frac{1}{2},2e)$

(ד) תחום ירידה: $x<0$ או $0<x<\frac{1}{2}$.

תחום עלייה: $x>\frac{1}{2}$.

(ה) אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(ו) ראה סקיצה משמאל:



(4) (א) $a=4$

(ב) כל x .

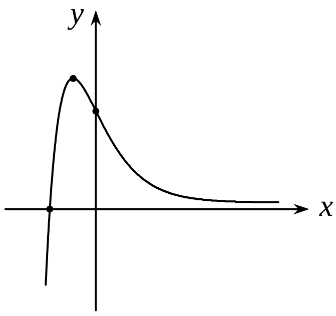
(ג) $\max\ (-1,2e)$

(ד) תחום עלייה: $x<-1$.

תחום ירידה: $x>-1$.

(ה) $(-2,0)$, $(0,4)$.

(ו) ראה סקיצה משמאל:



(5) (א) $a=3$ (ב) $y=6x+4$

(6) $a>0$

(7) (א) $a=-4$ (ב) $\min\ (2,\frac{2}{e^2})$

(ג) $k>2e^{-2}$: שתי נקודות משותפות.

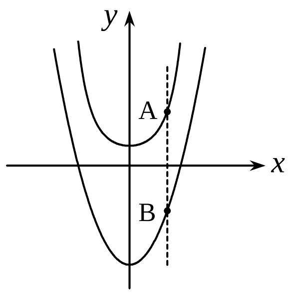
(ג) $k=2e^{-2}$: נקודה משותפת אחת.

(ג) $k<2e^{-2}$: אף לא נקודה משותפת אחת.

(8) (א) $a=-\frac{4}{3}$ (ב) מקסימום כאשר: $x=-\frac{2}{3}$.

ט. בעיות מקסימום ומינימום
הכוללות פונקציות מהצורה $e^{f(x)}$

דוגמא פתורה



בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=e^{x^2}$ ו- $g(x)=e\cdot x^2-5$.
הישר $x=t$ ($t>0$) חותך את הגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות
A ו- B בהתאמה (ראה ציור).

(א) מצא את ערכו של t, שעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

(ב) מהו האורך המינימלי של AB ?

פתרון:

(א) שיעורי הנקודות A ו- B הם: $A\left(t,e^{t^2}\right)$, $B\left(t,e\cdot t^2-5\right)$

נביע כעת את אורך הקטע AB

באמצעות t : $AB=\ell(t)=e^{t^2}-e\cdot t^2+5$

נגזור לפי t : $\ell'(t)=2t\cdot e^{t^2}-2e\cdot t$

נשווה את הנגזרת לאפס: $2t\cdot\left(e^{t^2}-e\right)=0$

ונקבל: $\cancel{t_1=-1}$, $\cancel{t_2=0}$, $t_3=1$

הפתרונות $t_1=-1$ ו- $t_2=0$ נפסלו על-פי הנתון: $t>0$.

כדי לבדוק האם מתקיים מינימום

נחשב את הנגזרת השנייה: $\ell''(t)=2e^{t^2}+4t^2\cdot e^{t^2}-2e$

נחשב את ערך הנגזרת השנייה

כאשר $t=1$: $\ell''(1)=2e+4e-2e=4e>0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{min}$

מסקנה: כאשר $t=1$ אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(ב) אורך הקטע AB המינימלי

מתקבל כאשר $t=1$: $AB_{\min}=\ell(1)=e-e+5=5$

מסקנה: אורך הקטע AB המינימלי הוא 5 .

תרגילים לעבודה עצמית

(1) נתונה הפונקציה: $y = e^{3x} - e^{-3x}$ בתחום: $-3 \le x \le 4$.

(א) מצא את שיעור ה- x בתחום הנתון שעבורו שיפוע הפונקציה מינימלי.

(ב) מצא את שיעור ה- x בתחום הנתון שעבורו שיפוע הפונקציה מקסימלי.

(ג) מהו ערכו של השיפוע המינימלי ומהו ערכו של השיפוע המקסימלי של הפונקציה הנתונה בתחום הנתון ?

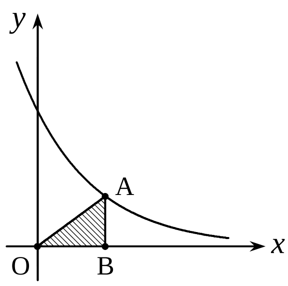
(2) נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{4}e^{2x} - e^{-x}$ בתחום: $-7 \le x \le 2$.

(א) מצא את שיעור ה- x בתחום הנתון שעבורו שיפוע הפונקציה מינימלי.

(ב) מצא את שיעור ה- x בתחום הנתון שעבורו שיפוע הפונקציה מקסימלי.

(ג) מהו ערכו של השיפוע המינימלי ומהו ערכו של השיפוע המקסימלי של הפונקציה הנתונה בתחום הנתון ?

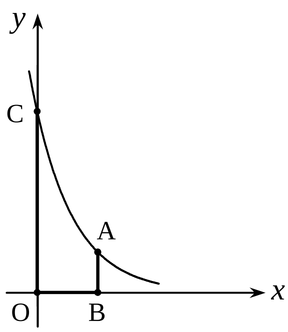
(3) בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $y = e^{-2x}$.
מנקודה A שברביע הראשון, הנמצאת על גרף הפונקציה, מורידים אנך לציר ה- x החותך את הציר בנקודה B (ראה ציור).
הנקודה O היא ראשית הצירים.



(א) מצא את שיעורי הנקודה A , שעבורה שטח המשולש ΔABO הוא מקסימלי.

(ב) מהו השטח המקסימלי של המשולש ΔABO ?

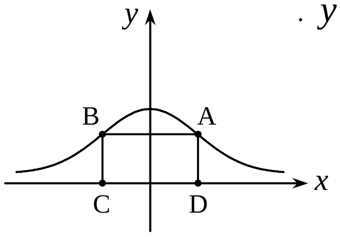
(4) בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $y = e^{4-x}$.
גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה C .
מנקודה A שברביע הראשון, הנמצאת על גרף הפונקציה, מורידים אנך לציר ה- x החותך את הציר בנקודה B (ראה ציור).
הנקודה O היא ראשית הצירים.



(א) מצא את שיעורי הנקודה A , שעבורה סכום הקטעים: $CO + OB + BA$ הוא מינימלי.

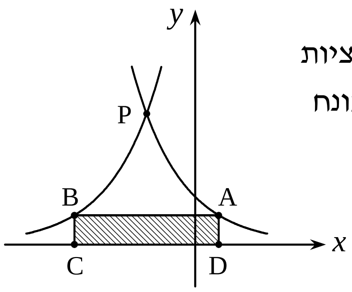
(ב) מהו סכום הקטעים $CO + OB + BA$ המינימלי ?

(5) בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $y = e^{-0.5x^2}$.
בנקודה A שברביע הראשון, הנמצאת על גרף הפונקציה, מעבירים מקביל לציר ה- x , החותך את גרף הפונקציה ברביע השני, בנקודה B .
דרך הנקודות A ו- B מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן ABCD (ראה ציור).



(א) מצא את שיעורי הנקודה A שעבורה שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.
(ב) מהו השטח המקסימלי של המלבן ABCD ?

(6) בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :
$f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{x+2}$, הנחתכים בנקודה P (ראה ציור). בין הגרפים של שתי הפונקציות ובין ציר ה- x חוסמים מלבן באופן בו קדקוד A מונח על גרף הפונקציה $f(x)$, קדקוד B מונח על גרף הפונקציה $g(x)$ והקדקודים C ו- D מונחים על ציר ה- x (ראה ציור).
הנקודה A נמצאת ימינה מהנקודה P .



(א) מצא את שיעורי נקודת המפגש P .
(א) מצא את שיעורי הנקודה A שעבורם שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.
(ב) מהו השטח המקסימלי של המלבן ABCD ?

תשובות

(1) (א) $x = 0$ (ב) $x = 4$
(ג) השיפוע המינימלי הוא : 6 . השיפוע המקסימלי הוא : $3 \cdot (e^{12} + e^{-12})$.

(2) (א) $x = 0$ (ב) $x = -7$
(ג) השיפוע המינימלי הוא : 1.5 . השיפוע המקסימלי הוא : $e^7 + \frac{1}{2} \cdot e^{-14}$.

(3) (א) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$ (ב) $S_{\max} = \frac{1}{4e}$

(4) (א) $A(4,1)$ (ב) $5 + e^4$

(5) (א) $A\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ (ב) $S_{\max} = \frac{2}{\sqrt{e}}$

(6) (א) $P(-1, e)$ (ב) $A(0,1)$ (ג) $S_{\max} = 2$

פרק 4: שאלות נוספות לחזרה
בחשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות

א. אינטגרל בלתי מסוים של פונקציות מהצורה: $e^{m\cdot x+n}$

בסעיף זה נשתמש בנוסחה: $\int e^{m\cdot x+n}\,dx=\frac{1}{m}\cdot e^{m\cdot x+n}+c$

דוגמא פתורה

חשב את האינטגרל: $I=\int\left(2e^{\frac{x}{3}}-\frac{3}{e^x}+3x^2\right)dx$

פתרון:

$$I=2\cdot\int e^{\frac{x}{3}}\,dx-3\cdot\int e^{-x}\,dx+3\cdot\int x^2\,dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{1/3}\cdot e^{\frac{x}{3}}-3\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-x}+3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3+c=6e^{\frac{x}{3}}+3e^{-x}+x^3+c$$

תרגילים לעבודה עצמית

חשב את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int 3e^x\,dx$ (2) $\int\left(2e^x-3\right)dx$

(3) $\int 8e^{-4x}\,dx$ (4) $\int\left(4e^{\frac{x}{2}}+x\right)dx$

(5) $\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x\right)dx$ (6) $\int\left(6e^{-3x}-2e^{\frac{x}{4}}\right)dx$

(7) $\int\left(10e^{5x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$ (8) $\int\left(e^x\cdot e^{x+1}\right)dx$

(9) $\int\left(\frac{4}{e^{2x}}-\frac{12}{e^{6x}}\right)dx$ (10) $\int\frac{e^{2x}}{e^{3x-2}}\,dx$

תשובות

(1) $3e^x+c$ (2) $2e^x-3x+c$ (3) $-2e^{-4x}+c$

(4) $8e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x^2+c$ (5) $\frac{1}{4}e^{2x}+x^2+c$ (6) $-2e^{-3x}-8e^{\frac{x}{4}}+c$

(7) $2e^{5x}+\frac{4}{x}+c$ (8) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+c$ (9) $-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{6x}}+c$

(10) $-e^{-x+2}+c$

ב. מציאת פונקציה לפי נגזרת ונקודה שעליה

דוגמא פתורה

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=e^{2x}-2$.
נתון כי הישר שמשוואתו: $y=-x+4$ משיק לגרף הפונקציה.
(א) מצא את שיעורי נקודת ההשקה.
(ב) מצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון:

(א) שיפוע המשיק הוא: $m=-1$. נציב בנגזרת הפונקציה: $y'=-1$

ונקבל: $e^{2x}-2=-1 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}=1 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x=0}$

נציב $x=0$ במשוואת המשיק כדי למצוא את שיעור ה- y

של נקודת ההשקה: $y=-0+4 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y=4}$

כלומר שיעורי נקודת ההשקה הם: $(0,4)$.

(ב) נחשב את האינטגרל הבלתי מסוים: $f(x)=\int\left(e^{2x}-2\right)dx$

ונקבל: $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x+c$

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך נקודת ההשקה $(0,4)$

ולכן: $f(0)=4$. נציב ונקבל: $4=f(0)=\frac{1}{2}+c \quad\Rightarrow\quad c=3\frac{1}{2}$

כלומר הפונקציה $f(x)$ היא: $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x+3\frac{1}{2}$

תרגילים לעבודה עצמית

(1) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3-e^{x}$.
נתון כי: $f(0)=4$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(2) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2e^{-\frac{x}{3}}+4$.
גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=1$.
מצא את הפונקציה $f(x)$.

(3) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-3e^{2x}+3e$.
גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(\frac{1}{2},0)$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(4) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^2$.
גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(4,3)$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(5) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=6e^{3x}-6$.
(א) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
(ב) אם ידוע ששיעור ה- y של נקודת הקיצון שמצאת בסעיף (א) שווה ל- (-2) מצא את הפונקציה $f(x)$.

(6) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=e-e^{-\frac{x}{4}}$.
(א) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
(ב) אם ידוע ששיעור ה- y של נקודת הקיצון שמצאת בסעיף (א) שווה ל- $2e$ מצא את הפונקציה $f(x)$.

(7) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=e^{3x}-e^{5-2x}$.
(א) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
(ב) אם ידוע ששיעור ה- y של נקודת הקיצון שמצאת בסעיף (א) שווה ל- e^3 מצא את הפונקציה $f(x)$.

(8) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=4-e^{-x}$.
נתון כי הישר שמשוואתו: $y=3x-2$ משיק לגרף הפונקציה.
(א) מצא את שיעורי נקודת ההשקה.
(ב) מצא את הפונקציה $f(x)$.

תשובות

(1) $f(x)=3x-e^x+5$ (2) $f(x)=-6e^{-\frac{x}{3}}+4x+7$

(3) $f(x)=-1\frac{1}{2}e^{2x}+3e\cdot x$ (4) $f(x)=2e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^2\cdot x+3$

(5) (א) $\min\ ,\ x=0$ (ב) $f(x)=2e^{3x}-6x-4$

(6) (א) $\min\ ,\ x=-4$ (ב) $f(x)=e\cdot x+4e^{-\frac{x}{4}}+2e$

(7) (א) $\min\ ,\ x=1$ (ב) $f(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{5-2x}+\frac{1}{6}e^3$

(8) (א) $(0,-2)$ (ב) $f(x)=4x+e^{-x}-3$

ג. אינטגרל מסוים של פונקציה מעריכית מהצורה: $e^{m\cdot x+n}$

דוגמא פתורה

חשב את האינטגרל המסוים: $I=\int_{-4}^{\ln 4} e^{-\frac{x}{2}}dx$

פתרון:

$$I=\int_{-4}^{\ln 4} e^{-\frac{x}{2}}dx=-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{-4}^{\ln 4}=-2\cdot\left[e^{-\frac{\ln 4}{2}}-e^{2}\right]$$

$$=-2\cdot\left[e^{-\frac{2\cdot\ln 2}{2}}-e^{2}\right]=-2\cdot\left[2^{-1}-e^{2}\right]=2e^{2}-1$$

תרגילים לעבודה עצמית

חשב את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int_{0}^{1} e^{2x}dx$

(2) $\int_{-1}^{1} e^{-x+1}dx$

(3) $\int_{0}^{2} e^{\frac{x}{2}}dx$

(4) $\int_{0}^{1.5}\left(2-4e^{\frac{2x}{3}}\right)dx$

(5) $\int_{-1}^{1}\left(6e^{-3x}-2x\right)dx$

(6) $\int_{0}^{\ln 2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx$

(7) $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} 4e^{-x}dx$

(8) $\int_{0}^{\ln 4}\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)dx$

תשובות

(1) $\frac{e^{2}-1}{2}$ (2) $e^{2}-1$ (3) $2e-2$

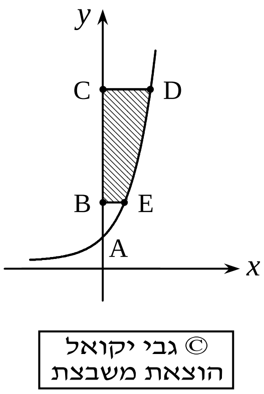
(4) $9-6e$ (5) $2\cdot\left(e^{3}-\frac{1}{e^{3}}\right)$ (6) $1\frac{1}{8}$

(7) $10\frac{2}{3}$ (8) $3\cdot\ln 2$

ד. שימוש באינטגרלים לחישוב שטחים
(ללא משוואות משיקים)

דוגמא פתורה

בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $y=e^{2x}$.
הישר $y=e$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה E
ואת ציר ה- y בנקודה B . הישר $y=e^2$ חותך את
גרף הפונקציה בנקודה D ואת ציר ה- y בנקודה C .
חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,
על-ידי ציר ה- y ועל-ידי הישרים: $y=e$ ו- $y=e^2$
(השטח המקווקו שבציור).



פתרון:

למציאת שיעורי הנקודה D , נציב $y=e^2$
בפונקציה הנתונה ונקבל: $e^{2x}=e^2 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D(1,e^2)}$

למציאת שיעורי הנקודה E , נציב $y=e$
בפונקציה הנתונה ונקבל: $e^{2x}=e \quad\Rightarrow\quad x=0.5 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E(0.5,e)}$

נחשב את השטח S_1 המוגבל על-ידי הישרים AC ו- CD
ועל-ידי הפונקציה $y=e^{2x}$. נקבל:

$$S_1=\int_0^1\left(e^2-e^{2x}\right)dx=e^2\cdot x-\tfrac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_0^1=$$
$$=\left(e^2-\tfrac{1}{2}\cdot e^2\right)-\left(0-\tfrac{1}{2}\cdot e^0\right)=\tfrac{1}{2}\cdot e^2+\tfrac{1}{2}$$

נחסיר מ- S_1 את השטח S_2 המוגבל על-ידי הישרים AB ו- BE
ועל-ידי הפונקציה $y=e^{2x}$. נקבל:

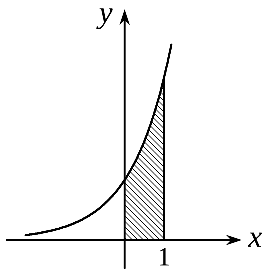
$$S_2=\int_0^{0.5}\left(e-e^{2x}\right)dx=e\cdot x-\tfrac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_0^{0.5}=$$
$$=\left(e\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot e^1\right)-\left(0-\tfrac{1}{2}\cdot e^0\right)=0+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

מכאן, השטח המבוקש הוא:

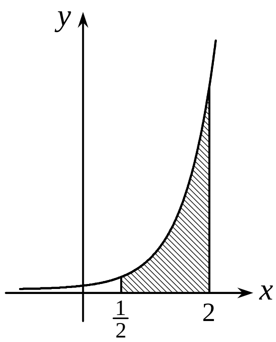
$$S_{\text{מבוקש}}=S_1-S_2=\tfrac{1}{2}\cdot e^2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\cdot e^2$$

תרגילים לעבודה עצמית

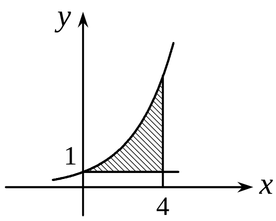
(1) חשב את השטח המוגבל על-ידי
גרף הפונקציה: $y = 2e^x$,
על-ידי הישר: $x = 1$,
ועל-ידי הצירים x ו- y
(השטח המקווקו שבציור).



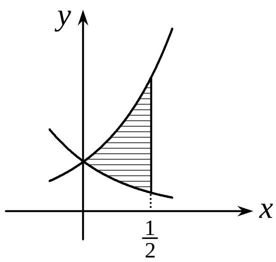
(2) חשב את השטח המוגבל על-ידי
גרף הפונקציה: $y = 4e^{2x} - 2$,
על-ידי הישרים: $x = \frac{1}{2}$ ו- $x = 2$,
ועל-ידי ציר ה- x
(השטח המקווקו שבציור).



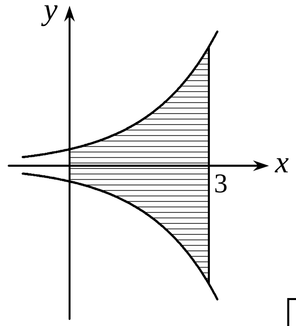
(3) חשב את השטח המוגבל על-ידי
גרף הפונקציה: $y = e^{x/2}$,
ועל-ידי הישרים: $x = 4$ ו- $y = 1$
(השטח המקווקו שבציור).



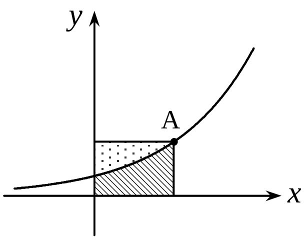
(4) חשב את השטח המוגבל על-ידי
הגרפים של הפונקציות: $y = e^{2x}$
ו- $y = e^{-2x}$ ועל-ידי הישר: $x = \frac{1}{2}$
(השטח המקווקו שבציור).



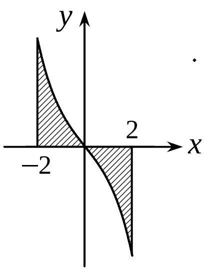
(5) חשב את השטח המוגבל על-ידי
הגרפים של הפונקציות : $y = e^{x/3}$
ו- $y = -e^{x/3}$, על-ידי הישר : $x = 3$
ועל-ידי ציר ה- y
(השטח המקווקו שבציור).



(6) הישר $y = e$ חותך את גרף הפונקציה
$y = e^{x/4}$ בנקודה A . S_1 הוא השטח
המוגבל בין גרף הפונקציה $y = e^{x/4}$,
ציר ה- x , ציר ה- y והאנך מנקודה A
לציר ה- x (השטח המקווקו שבציור).
S_2 הוא השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $y = e^{x/4}$,
ציר ה- y והישר $y = e$ (השטח המנוקד שבציור). חשב את : $S_1 : S_2$.



(7) (א) חשב את האינטגרל המסוים : $I = \int_{-2}^{2} \left(e^{-x} - e^{x}\right) dx$.
(ב) בשרטוט שלפניך מתואר גרף
הפונקציה : $y = e^{-x} - e^{x}$
בתחום : $-2 \le x \le 2$.
חשב את השטח המקווקו שבציור.



<u>תשובות</u>

(1) $S = 2e - 2$ (2) $S = 2e^4 - 2e - 3$

(3) $S = 2e^2 - 6$ (4) $S = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} - 1$

(5) $S = 6e - 6$

(6) $S_1 : S_2 = e - 1$

(7) (א) $I = 0$ (ב) $S = 2e^2 + 2e^{-2} - 4$

ה. שימוש באינטגרלים לחישוב שטחים (כולל משוואות משיקים)

דוגמא פתורה

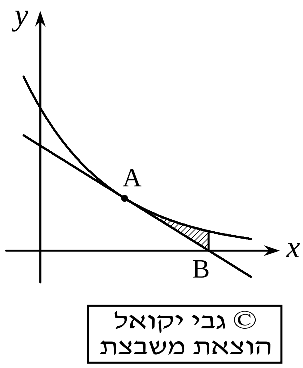
בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=e^{-x}$.

בנקודה A על גרף הפונקציה, שבה $x=1$

מעבירים משיק החותך את ציר ה- x בנקודה B .

(א) מצא את משוואת המשיק בנקודה A .

(ב) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף (א) ועל-ידי ישר המקביל לציר ה- y ועובר דרך הנקודה B (השטח המקווקו שבציור).



פתרון:

(א) כדי למצוא את שיפוע המשיק נחשב את $f'(x)$: $f'(x)=-e^{-x}$

נציב $x=1$ ונקבל: $m_{\text{משיק}}=f'(1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$

נציב $x=1$ ב- $f(x)$ כדי למצוא את שיעור ה- y של נקודה A ונקבל: $f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}(1,\frac{1}{e})$

כדי למצוא את משוואת המשיק נציב בנוסחה: $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

ונקבל: $y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{e}\cdot x+\frac{2}{e}}$

(ב) נציב $y=0$ במשוואת המשיק ונמצא את הנקודה B :

$$0=-\frac{1}{e}\cdot x+\frac{2}{e} \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(2,0)$$

מכאן, השטח המבוקש הוא:

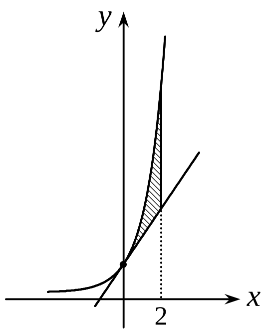
$$S=\int_1^2\left[e^{-x}-\left(-\frac{1}{e}\cdot x+\frac{2}{e}\right)\right]dx=-e^{-x}+\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{e}\cdot x\Big|_1^2=$$
$$=\left(-e^{-2}+\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{2}{e}\cdot 2\right)-\left(-e^{-1}+\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{2}{e}\cdot 1\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e}-\frac{4}{e}\right)-\left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}-\frac{2}{e}\right)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{e^2}$$

תרגילים לעבודה עצמית

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3e^x$.

(א) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה היא חותכת את ציר ה- y .

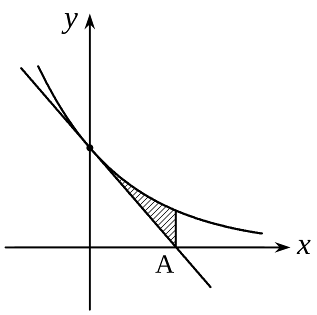
(ב) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף (א) ועל-ידי הישר $x = 2$ (השטח המקווקו שבציור).



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-2x}$.

(א) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה היא חותכת את ציר ה- y .

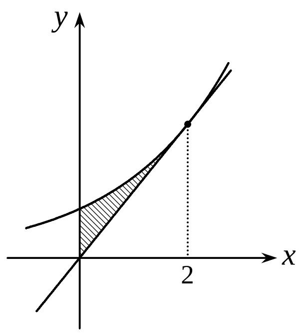
(ב) המשיק שמצאת בסעיף (א) חותך את ציר ה- x בנקודה A . חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק ועל-ידי האנך לציר ה- x העובר דרך הנקודה A (השטח המקווקו שבציור).



(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x/2}$.

(א) מצא את משוואת המשיק בנקודה על גרף הפונקציה שבה $x = 2$, והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.

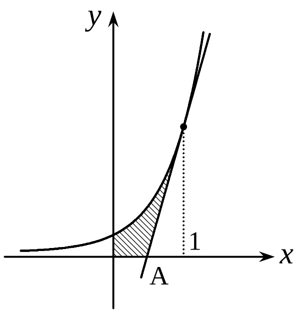
(ב) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק ועל-ידי ציר ה- y (השטח המקווקו שבציור).



(4) נתונה הפונקציה : $f(x)=4e^{2x}$.

(א) מצא את משוואת המשיק בנקודה על גרף הפונקציה שבה $x=1$.

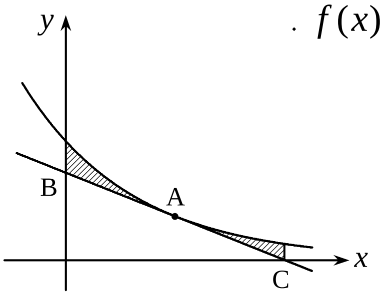
(ב) המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A . מצא את שיעורי הנקודה A וחשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק ועל-ידי הצירים x ו- y (השטח המקווקו שבציור).



(5) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $f(x)=e^{-x/2}$. בנקודה $A(2,\frac{1}{e})$ שעל גרף הפונקציה מעבירים משיק החותך את ציר ה- x בנקודה C ואת ציר ה- y בנקודה B (ראה ציור).

(א) מצא את משוואת המשיק.

(ב) חשב את השטח המקווקו שבציור.



תשובות

(1) (א) $y=3x+3$ (ב) $S=3e^2-15$

(2) (א) $y=-2x+1$ (ב) $A(0.5,0)$, $S=\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}$

(3) (א) $y=\frac{e}{2}\cdot x$ (ב) $S=e-2$

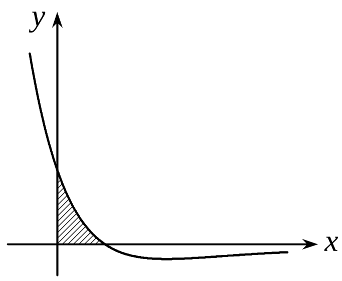
(4) (א) $y=8e^2\cdot x-4e^2$ (ב) $A(0.5,0)$, $S=e^2-2$

(5) (א) $y=-\frac{1}{2e}\cdot x+\frac{2}{e}$ (ב) $B(0,\frac{2}{e})$, $C(4,0)$, $S=2-\frac{2}{e^2}-\frac{4}{e}$

ו. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה

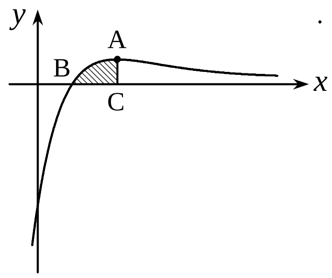
תרגילים לעבודה עצמית

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(1) (א) נתונה הפונקציה: $y = x \cdot e^{-x}$. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $y' = e^{-x}(1-x)$.

(ב) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{-x}(1-x)$. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי הצירים x ו- y (השטח המקווקו שבציור).



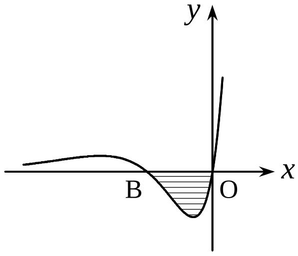
(2) (א) נתונה הפונקציה: $y = -x \cdot e^{-x/2}$. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $y' = e^{-x/2} \cdot (\frac{x}{2} - 1)$.

(ב) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{-x/2} \cdot (x-2)$. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה B . נקודה A היא נקודת המקסימום של הפונקציה.

(i) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

(ii) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי ציר ה- x ועל-ידי האנך AC היורד מנקודה A לציר ה- x (השטח המקווקו שבציור).

(3) (א) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 \cdot e^{x/2}$. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $y' = e^{x/2} \cdot (x^2 + 4x)$.



(ב) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{x/2} \cdot (\frac{1}{2}x^2 + 2x)$.
גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים O וגם בנקודה נוספת B .

(i) מצא את שיעורי הנקודה B .

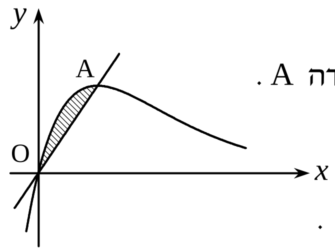
(ii) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי ציר ה- x (השטח המקווקו שבציור).

(4) (א) הוכח כי: $\int x\cdot e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{4}e^{-2x}\cdot(1+2x)+c$.

(ב) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$f(x)=4x\cdot e^{-2x}$. גרף הפונקציה עובר דרך

ראשית הצירים, ולפונקציה יש מקסימום בנקודה A .



(i) מצא את שיעורי הנקודה A .

(ii) הראה כי משוואת הישר העובר

דרך הנקודות A ו- O היא: $y=\frac{4}{e}\cdot x$.

(iii) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי הישר

העובר דרך הנקודות A ו- O (השטח המקווקו שבציור).

(5) (א) הוכח כי: $\int\left(e^{-x^2/2}-e^{-x^2/2}\cdot x^2\right)dx=x\cdot e^{-x^2/2}+c$.

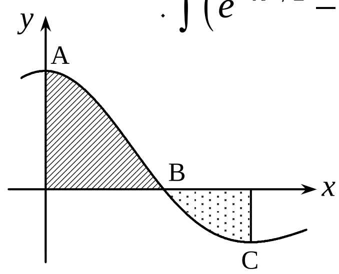
(ב) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$f(x)=e^{-x^2/2}\cdot(1-x^2)$. גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y בנקודה A ואת החלק

החיובי של ציר ה- x בנקודה B . לפונקציה

יש מינימום בנקודה C שברביע הרביעי.



(i) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B ואת שיעור ה- x של נקודה C .

(ii) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה

ועל-ידי הצירים x ו- y (השטח המקווקו שבציור).

(iii) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי ציר ה- x

ועל-ידי האנך מנקודה C לציר ה- x (השטח המנוקד שבציור).

<u>תשובות</u>

(1) (ב) $S=\frac{1}{e}\approx 0.368$

(2) (ב) (i) $A(4,\frac{2}{e^2})$, $B(2,0)$ (ii) $S=\frac{4}{e}-\frac{8}{e^2}\approx 0.39$

(3) (ב) (i) $B(-4,0)$ (ii) $S=\frac{16}{e^2}\approx 2.17$

(4) (ב) (i) $A(\frac{1}{2},\frac{2}{e})$ (iii) $S=1-\frac{5}{2e}\approx 0.08$

(5) (ב) (i) $A(0,1)$, $B(1,0)$, שיעור ה- x של C : $x_C=\sqrt{3}$

(ii) $S=1/\sqrt{e}\approx 0.61$

(iii) $S=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{\sqrt{3}}{e\cdot\sqrt{e}}=\frac{e-\sqrt{3}}{e\cdot\sqrt{e}}\approx 0.22$