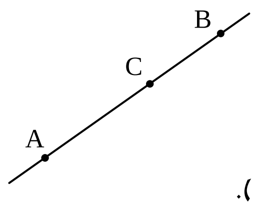
שאלון 035007 - חלוקת קטע ביחס נתון

הנושא **"חלוקת קטע ביחס נתון"** (בוקטורים) התווסף לתוכנית הלימודים של שאלון 035007 בחוזר מפמ"ר המתמטיקה תשס"ה / 1 . הנושא לא הופיע בחוזרי מפמ"רי המתמטיקה תשס"ג / 2 ותשס"ג / 4 .

א. חלוקה פנימית

נפתח **בדוגמא** מספרית, ואחריה נפתור באופן כללי.



נתונות שתי נקודות A ו- B במרחב (המרחב יכול להיות חד-מימדי, דו-מימדי או תלת-מימדי). יש למצוא את שיעורי הנקודה C , המחלקת מבפנים את הקטע AB ביחס של 3 : 2 (כלומר: $AC : BC = 3:2$).

פתרון:

נתבונן בוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{CB}$. אורכי הוקטורים מקיימים: $\frac{3}{2} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$.

אם נכפול בהצלבה נקבל: $2 \cdot |\overrightarrow{AC}| = 3 \cdot |\overrightarrow{CB}|$.

הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{CB}$ הם **באותו כיוון**, ולכן מתקיים: $2 \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{CB}$.

נסמן על-ידי $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ את שיעורי הנקודות A , B ו- C בהתאמה.

לפיכך מתקיים: $2 \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 3 \cdot (\underline{b} - \underline{c})$

נפתח סוגריים, נבודד את $\underline{c}$ ונקבל: $5 \cdot \underline{c} = 2 \cdot \underline{a} + 3 \cdot \underline{b}$

נחלק ב- 5 ונקבל: $\underline{c} = \frac{2}{5} \cdot \underline{a} + \frac{3}{5} \cdot \underline{b}$

נפתור כעת את אותה הבעיה, אך **באופן כללי**:

יש למצוא נקודה C המחלקת מבפנים את הקטע AB ביחס של $m:n$.

פתרון:

יחס החלוקה $m:n$ ניתן לרישום גם כיחס: $p:(1-p)$,

כאשר: $p = \frac{m}{m+n}$ ו- $1-p = \frac{n}{m+n}$.

ניתן לראות כי: $\frac{m}{n} = \frac{p}{1-p}$ וגם כי: $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$.

מכאן גם מקבלים כי: $0 < p < 1$ (היות והמכנה בביטוי $\frac{m}{m+n}$ גדול מהמונה).

המשך בעמוד הבא...

אם הנקודה C מחלקת את הקטע AB ביחס של: $p:(1-p)$ אזי: $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{p}{1-p}$

תחת הסימונים שפורטו לעיל, ולאחר שנכפול בהצלבה נקבל את המשוואה: $(1-p)\cdot(\underline{c}-\underline{a})=p\cdot(\underline{b}-\underline{c})$

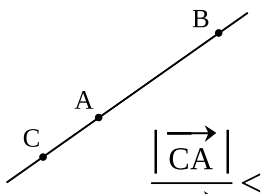
ומכאן נקבל: $\underline{c}=(1-p)\cdot\underline{a}+p\cdot\underline{b}$

* * * * *

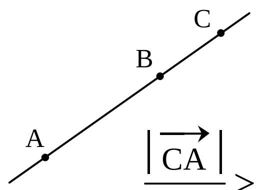
ב. חלוקה חיצונית

אם הנקודה C נמצאת על הישר המחבר את הנקודות A ו- B, אך מחוץ לקטע AB אז אומרים שהנקודה C מחלקת את הקטע AB **מבחוץ** ביחס של: $|\overrightarrow{CA}|:|\overrightarrow{CB}|$.

- אם היחס **גדול מ- 1**, אז הנקודה C קרובה יותר לנקודה B מאשר לנקודה A.
- אם היחס **קטן מ- 1**, אז הנקודה C קרובה יותר לנקודה A מאשר לנקודה B.



$\dfrac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|}<1$



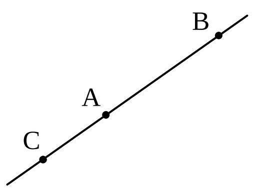
$\dfrac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|}>1$

דוגמא מס' 1

נתונות שתי הנקודות במרחב: $A(1,2,3)$ ו- $B(4,6,2)$.

מצא את שיעורי הנקודה C, המחלקת את הקטע AB ביחס $1:3$, **מבחוץ**.

פתרון:



היחס מקיים: $|\overrightarrow{CA}|:|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{3}<1$

כלומר: $3\cdot(\underline{a}-\underline{c})=1\cdot(\underline{b}-\underline{c})$

$3\cdot\underline{a}-3\cdot\underline{c}=\underline{b}-\underline{c}$

ומכאן: $\underline{c}=1\frac{1}{2}\cdot\underline{a}-\frac{1}{2}\cdot\underline{b}$

נציב את שיעורי הנקודות הנתונות

ונקבל: $\underline{c}=1\frac{1}{2}\cdot(1,2,3)-\frac{1}{2}\cdot(4,6,2)$

כלומר: $\underline{c}=(-\frac{1}{2},0,3\frac{1}{2})$

דוגמא מס' 2

בדוגמא הקודמת, מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה A את הקטע CB .

פתרון: **דרך מס' (1)**

ידוע לנו שהקטע CB ארוך פי 3 מהקטע CA .

לכן, הקטע AB ארוך פי 2 מהקטע CA .

מסקנה: הנקודה A מחלקת את הקטע CB ביחס של 1:2 .

פתרון: **דרך מס' (2)**

נתונות הנקודות: $A(1,2,3)$, $B(4,6,2)$ ו- $C(-\frac{1}{2},0,3\frac{1}{2})$.

נשתמש בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות ונקבל:

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{[1-(-\tfrac{1}{2})]^2+(2-0)^2+(3-3\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{2\tfrac{1}{4}+4+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{6\tfrac{1}{2}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

מכאן נקבל:
$$|\overrightarrow{CA}|:|\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{6.5}}{\sqrt{26}} = \frac{1}{2}$$

מסקנה: הנקודה A מחלקת את הקטע CB ביחס של 1:2 .

פתרון: **דרך מס' (3)**

נראה להלן **דרך כללית** לפתרון בעיה מסוג זה, עבור המקרים בהם הנקודה C קרובה יותר לנקודה A מאשר לנקודה B . באופן דומה ניתן לפתור גם למקרה שבו הנקודה C קרובה יותר לנקודה B מאשר לנקודה A .

מבלי לפגוע בכלליות הבעיה,

נוכל לסמן:
$$|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{CB}| = 1-p \quad , \quad |\overrightarrow{CA}|:|\overrightarrow{CB}| = p$$

עבור: $0<p<1$ ו- $0<1-p<1$

מתקיים היחס:
$$\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{p}{1-p}$$

נכפול באלכסון את השוויון האחרון וניעזר בכך שהווקטורים $\overrightarrow{CA}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ הם בעלי אותו הכיוון ונקבל:
$$(1-p)\cdot\overrightarrow{CA} = p\cdot\overrightarrow{AB}$$

כלומר:
$$(1-p)\cdot(\underline{a}-\underline{c}) = p\cdot(\underline{b}-\underline{a})$$

המשך בעמוד הבא...

$$\underline{a}-\underline{c}-p\cdot(\underline{a}-\underline{c})=p\cdot(\underline{b}-\underline{a})$$
$$\underline{a}-\underline{c}=p\cdot(\underline{b}-\underline{c})$$

בבעיה שלפנינו:
$$(1\tfrac{1}{2},2,-\tfrac{1}{2})=p\cdot(4\tfrac{1}{2},6,-1\tfrac{1}{2})$$

כלומר: $p=\frac{1}{3}$ ולכן: $1-p=\frac{2}{3}$.

היחס המבוקש הוא: $p:(1-p)$, כלומר: $1:2$.

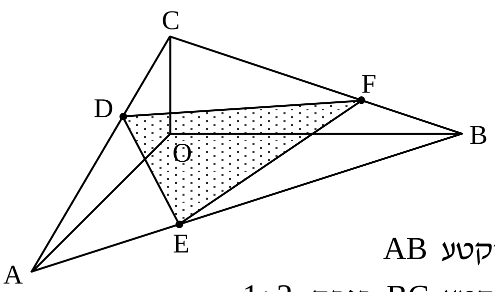
הערה: שים לב, כי הנקודה A מחלקת את הוקטור $\overrightarrow{CB}$ ביחס של $1:2$, ואילו את הקטע $\overrightarrow{BC}$ ביחס של $2:1$.

תרגילים לעבודה עצמית

(1) הוכח כי אם הנקודה C נמצאת באמצע הקטע AB , אזי: $\underline{c}=\frac{1}{2}\cdot(\underline{a}+\underline{b})$, כאשר $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ מסמנים את שיעורי הנקודות A , B ו- C בהתאמה.

(2) נתון משולש ΔABC ששיעורי קדקודיו: $A(1,2,0)$, $B(3,4,6)$, $C(6,5,9)$. CD הוא התיכון לצלע AC במשולש ΔABC . AE הוא התיכון לצלע CD במשולש ΔACD . F היא נקודת המפגש של הישרים AC ו- BE . מצא את שיעורי הנקודה F .

(3) במרחב נתונות ארבע הנקודות:
$A(6,0,0)$, $B(0,9,0)$
$C(0,0,3)$, $O(0,0,0)$.
הנקודה D מחלקת את הקטע AC ביחס $2:1$. הנקודה E מחלקת את הקטע AB ביחס $1:2$. הנקודה F מחלקת את הקטע BC ביחס $1:2$.



(א) מצא את שיעורי הנקודות D , E ו- F .

(ב) התיכונים לצלעות במשולש ΔDEF נפגשים בנקודה M . מצא את אורך הקטע OM .

(4) נתונים שיעורים של שלוש נקודות: $A(3,1,-3)$, $B(1,4,-7)$, $C(5,-2,1)$.

(א) הראה ששלוש הנקודות נמצאות על קו ישר אחת, כאשר הנקודה C נמצאת **מחוץ** לקטע AB .

(ב) באיזה יחס מחלקת הנקודה C את הקטע AB ?

(ג) באיזה יחס מחלקת הנקודה C את הקטע BA ? נמק !

(5) נתונים שיעורים של שתי נקודות: $A(4,1)$ ו- $B(29,51)$. הנקודה C מחלקת את הקטע AB מבפנים ביחס $AC:CB=2:3$. הנקודה D מחלקת את הקטע CB מבפנים ביחס $CD:DB=2:3$. מצא את הוקטור $\overrightarrow{CD}$.

(6) במשולש ΔABC נתון כי: $\overrightarrow{AB}=(6,4)$ ו- $\overrightarrow{AC}=(-4,6)$.

(א) הוכח כי המשולש ΔABC הוא משולש ישר-זווית.

(ב) נקודה D נמצאת באמצע היתר BC . מצא את הוקטור $\overrightarrow{AD}$.

(ג) נקודה E מחלקת את היתר ביחס $CE:EB=2:3$.
מצא את הוקטור $\overrightarrow{AE}$.

(ד) מצא את הוקטור $\overrightarrow{ED}$.

(ה) נקודה F נמצאת באמצע הצלע AB . מצא את הוקטור $\overrightarrow{CF}$.

(ו) נקודה M היא נקודת המפגש של התיכון AD עם התיכון CF .
הוכח כי: $\overrightarrow{MB}=(\frac{16}{3},\frac{2}{3})$.

תשובות

(2) $(\frac{13}{3},4,6)$

(3) (א) $D(2,0,2)$, $E(4,3,0)$, $F(0,6,1)$. (ב) $\sqrt{14}$

(4) (ב) $1:2$ (ג) $2:1$

(5) $\overrightarrow{CD}=(6,12)$

(6) (ב) $\overrightarrow{AD}=(1,5)$ (ג) $\overrightarrow{AE}=(0,5.2)$

(ד) $\overrightarrow{ED}=(1,-0.2)$ (ה) $\overrightarrow{CF}=(7,-4)$